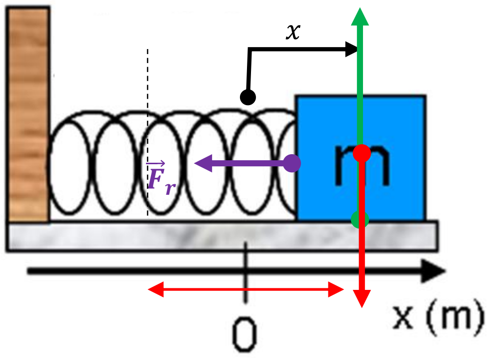
DOC3	الجمل كتلة - نابض Spring – mass systems	وثيقة 3

أولا: الجملة $m-k$ الأفقية



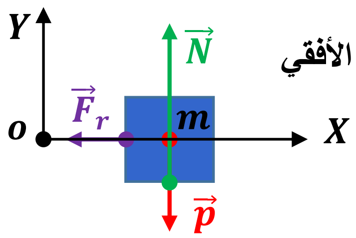
- نزيح الكتلة m مسافة x جهة اليمين و نتركها تهتز يمينا و شمالا حول وضعية التوازن O (شكل1).

ملاحظة: عند وضعية التوازن (النقطة O)، النابض في وضعية راحة، أي غير متشوه، فالدراسة السكونية (دراسة التوازن) ليست ضرورية.

الطريقة 1: دراسة الجملة – طريقة المبدأ الأساسي للتحريك

أ. مخطط الجسم الحر (DCL): نعزل الكتلة المهتزة و نمثل القوى المؤثرة عليها(شكل2).

ب. إختيار معلم الحركة (OXY): الحركة تتم على المحور الأفقي OX :



من المبدأ الأساسي للتحريك : $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$

$$\vec{F}_r + \vec{p} + \vec{N} = m\vec{a}$$

بإسقاط المعادلة على معلم الحركة:

$$OY:\ \ N - p = 0 \ \Rightarrow N = p$$

$$OX:\ \ -F_r = ma \ \Rightarrow\ -kx = m\ddot{x} \ \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

و هي معادلة من الشكل : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ حيث: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ و بالتالي:

- النبض الذاتي (أو الطبيعي) للجملة $m-k$ هو: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
- و منه الدور الذاتي للجملة هو: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
- و التواتر (التردد): $$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

الطريقة 2: دراسة الجملة – طريقة الطاقة (رايلي $Rayleigh$)

في الجمل الفيزيائية المحافظة، الطاقة الكلية محفوظة أو مصونة (ثابتة)، بالتالي مشتقها الزمني معدوم.

أ. الطاقة الحركية للكتلة m المتحركة: $$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

ب. الطاقة الكامنة المرونية المخزنة في النابض: $$E_p = \frac{1}{2}kx^2(t)$$

ت. الطاقة الكلية (الميكانيكية) محفوظة:

$$E_T = E_C + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Cte$$

المشتق الزمني للطاقة الكلية (مع العلم أن الإزاحة x و السرعة $\dot{x}$ دالتان زمنيتان) :

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0,\ \dot{x} \neq 0 \ \Rightarrow\ m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

و هي نفس المعادلة المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك.

الطريقة 3: دراسة الجملة – طريقة لاغرانج $(Lagrange)$

أ. حساب دالة لاغرانج **Le Lagrangien du Système.**

$$L(\dot{x}, x, t) = T - V = E_C - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

ب. معادلة لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - (-kx) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

و هي نفس المعادلة المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك و طريقة الطاقة.